COMPLETION DE GROUPES

Par HATEGEKIMANA L. Emmanuel
Assistant à l'I.S.P./Bukavu
B.P. 854 – BUKAVU

Abstract

Consider a given group G. There are F and H groups such that F is an extension of G through H. In which case we have G ≈ K where K F and F/K ≈ H. Therefore G admits a full G group and if G 2,6 , then G = PermG and otherwise G = PermG . This completed G of G contains an extension of G by a given group if G 2,6 .

0. INTRODUCTION

Dans leur évolution, les mathématiques ont été caractérisées par un échelonnement des structures construites à partir de leurs naissances basées sur les ensembles (topologie, magma, ...) jusqu'à leurs niveaux actuels marqués par les catégories. Cette démarche constructive des mathématiques s'insère dans la logique des sciences pures, c'est-à-dire celles qui ne se préoccupent d'aucune application, mais qui se concentrent sur une acquisition de nouvelles connaissances. ([1], p. 166). Il est alors évident de remarquer dans cette optique que le mathématicien entreprend une série de démarches pour construire une nouvelle structure lorsque les propriétés de celles qui existent ne suffisent plus à donner une base à la résolution des problèmes qui se posent :

- Il commence d'abord par construire un ensemble plus grand et le munit de la structure de même espèce que celle dont on dispose. Si cet ensemble ne suffit pas pour résoudre ce problème, on passe au quotient de cet ensemble par une relation d'équivalence compatible avec sa structure (ex: construction de l'anneau et du demi-groupe de fraction relativement à une partie donnée). La construction d'un tel ensemble se fait toujours intuitivement sur base du problème à résoudre (ex: construction d'un corps algébriquement clos contenant un corps donné) et ces éléments ne servent que d'une base d'indication.
- Il munit ensuite l'ensemble obtenu de la structure jugée nécessaire pour résoudre le problème (exemple dans la complétion projective d'un espace affine, on munit le vectoriel universel de la structure d'espace projectif, ...).
- Enfin, il plonge par un monomorphisme de structure l'ensemble de départ dans le nouvel ensemble construit et on vérifie l'existence d'une solution au problème posé ([2], p. 51).

Généralement, à un tel problème est toujours lié le problème de prolongement de morphismes de la structure primitive aux nouvelles structures construites. Loin de satisfaire cette préoccupation supplémentaire, notre travail se penchera sur la construction de deux types particuliers d'extensions de groupes notamment les extensions d'un groupe par un autre groupe et les complétés d'un groupe en faisant ressortir l'existence et la construction de ces extensions et quelques relations entre ces genres d'extensions de groupes.

Il est facile de remarquer que de par la définition d'une extension de groupe (G est une extension de F si $F \subset G$), l'importance et l'opportunité de construire une extension de groupe (complétion d'un groupe) résultent toujours de la situation particulière dans laquelle on se trouve. Par exemple lorsqu'on passe d'un espace vectoriel à l'espace affine qui lui est associé, on obtient une extension du groupe additif sous-jacent à l'espace vectoriel par le groupe linéaire. C'est le groupe affine.

Les avantages algébriques ou mathématiques en général des extensions et complétés des groupes devront être déduits d'une étude approfondie de ces derniers et notamment aussi en leurs applications. Cette étude n'a pas encore été faite et quelques livres seulement fournissent des renseignements sur les définitions.

1. QUELQUES RAPPELS ET NOTATIONS

1) Sauf mention contraire, les lois des groupes considérés sont notées multiplicativement.

2) Un groupe G est dit complet si son centre Z(G) est un singleton et tout automorphisme de F est intérieur.
Donc, le groupe G est complet ssi Z(G) = $\{e\}$ et IntG = AutG, IntG et AutG désignant respectivement le groupe des automorphismes intérieurs de G et le groupe des automorphismes de G.
Un complété d'un groupe G est tout groupe F complet et contenant le groupe G à un isomorphisme près.
On note H $\cong$ G pour dire que les groupes H et G sont isomorphes et H ΔG pour signifier que H est un sous-groupe distingué de G.

3) Si Fi est une famille des groupes, $0 \leq i \leq n$, f i : Fi-1 $\rightarrow$ Fi, des morphismes de groupes, on appelle suite de morphismes, toute suite du genre :

$$F0 \xrightarrow{f_1} F1 \xrightarrow{f_2} F2 \xrightarrow{f_3} \ldots \text{ Fi -1} \xrightarrow{f_2} Fi \rightarrow \ldots \xrightarrow{f_n} Fn$$

Cette suite est exacte en tout i, $1\leq i \leq$n-1, si Imfi = Kerfi+1 , Imfi étant l'image de fi et Kerfi le noyau de fi .
Lorsque F0 et Fn sont les groupes identiques i.e. F0 = Fn = $\{e\}$ alors la suite exacte ayant pour extrémités le groupe identique est dite courte. On désignera par 1 ou 0 le groupe identique pour les lois multiplicatives et additives respectivement.

4) Si F, G et H sont des groupes, on dit que le groupe G est une extension de F par H, s'il existe un morphisme de groupes f : F $\rightarrow$ G et un morphisme de groupes g : G $\rightarrow$ H tel que la suite $1 \rightarrow F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \rightarrow 1$ soit exacte et courte. Dans ce cas, f est un monomorphisme et g un épimorphisme de groupes tels que Imf = Kerg.

5) Dans le groupe de permutation d'un groupe donné, on a les propriétés suivantes :

a) Un automorphisme est caractérisé par sa trace sur les transpositions i.e. par sa restriction sur les transpositions et conserve les ordres.

b) Tout automorphisme de l'ensemble des permutations qui laisse invariante la classe de transpositions est intérieur (5 , p. 321).

2. EXTENSION D'UN GROUPE PAR UN AUTRE

2.1. Résultat 1

Soit G un groupe quelconque. Il existe des groupes F et H tels que F soit une extension de G par H.

Démonstration :
Montrons que si G est un groupe donné, il existe des groupes F et H et des morphismes f : G$\rightarrow$ F et g : F $\rightarrow$ H tels que la suite $1 \rightarrow G \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} H \rightarrow 1$ soit exacte et courte. Notons d'abord que tout groupe G peut être extension de lui-même par le groupe trivial 1. Il suffit de prendre F = G et H = 1 et la suite devient $1 \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 1$ qui se réduit à $1 \rightarrow G \rightarrow 1$.
Construisons des groupes F $\neq$ G et H tels que F soit une extension de G par H. Considérons le groupe produit F = G x G. Soit i le morphisme de G dans G2 =F défini par i (x) = (x,e) où e est le neutre de G. Alors Im i = G x $\{e\}$ est un sous-groupe distingué de G. G étant isomorphe à G x $\{e\}$ alors soit H le groupe quotient $G^2/Gx\{e\}$. Considérons l'épimorphisme s qui à (x,y) associe la classe de (x,y) modulo le sous-groupe distingué G x $\{e\}$.

Alors la suite $1 \rightarrow G \xrightarrow{i} G2 \xrightarrow{s} H \rightarrow 1$ est une suite exacte courte car Imi =kers = G x $\{e\} \cong$G. D'où F = G2 est une extension de G par H.
Remarquons que si Z(G) = $\{e\}$, on peut aussi considérer la suite exacte courte $1\rightarrow G \xrightarrow{f} AutG \xrightarrow{g} AutG/IntG \rightarrow 1$ où f associe à x $\in$ G, l'automorphisme intérieur associé à x et g la surjection canonique de AutG sur $AutG/IntG$ car G $\cong$ IntG Δ AutG et Imf = IntG = Kerg, G étant non commutatif. Donc AutG est une extension de G par $AutG/IntG$

2.2. Exemples

1) Tout groupe G est une extension de son centre par le groupe des automorphismes intérieurs car la suite $1 \rightarrow Z(G) \xrightarrow{i} G \xrightarrow{f} IntG \rightarrow 1$ où f(x) = f est l'automorphisme intérieur associé à x, $\forall$x $\in$ Z(G) ; est exacte courte.

2) Soit A un espace affine associé à un espace vectoriel E sur un corps commutatif K. Soit E1 le groupe (E,+) sous-jacent à l'espace vectoriel E. Considérons le groupe affine de A, G(A) et le groupe linéaire de E, GL(E). Alors la suite des morphismes de groupe $0 \rightarrow E \xrightarrow{f} G(A) \xrightarrow{g'} GL(E) \rightarrow 1$ avec $f(u) = t_{\vec{u}}$, $\forall \vec{u} \in$E1 , $t_{\vec{u}}$ étant la translation du vecteur $\vec{u}$, g(φ)= α ,α étant le morphisme associé à φ, est exacte et courte ([4], p. 109). Donc G(A) est une extension de E par le groupe GL(E).

3) On maintient les données de l'exemple 2). Considérons maintenant E(A) le groupe des isométries d'un espace affine euclidien A, appelé le groupe euclidien. E(A) est un sous-groupe du groupe affine G(A) et le morphisme g de G(A) dans GL(E) définit dans b) a pour restriction un épimorphisme g' : E(A) $\to$ O(E), O(E) étant le groupe orthogonal de E. En considérant toujours l'application f définie ci-haut par $f(\vec{u}) = t_{\vec{u}}$, $\forall \vec{u} \in$ E1 alors la suite O$\to$ E $\xrightarrow{f}$ E(A) $\xrightarrow{g'}$ O(E) $\to$ 1 est exacte et courte ([4], p. 130). D'où E(A) est une extension de E1 par le groupe O(E) avec E(A) $\subset$ G(A) et O(E) $\subset$ GL(E).

2.3. Résultat 2.

Un groupe F est une extension de G par un groupe H si et seulement si G est isomorphe à un sous-groupe distingué K de F tel que F/K soit isomorphe à H.
Démonstration
C.N. : Supposons que F est une extension de G par H. Alors il existe une suite exacte courte 1 $\xrightarrow{f}$ G $\xrightarrow{g}$ H $\to$ 1. Donc g est un épimorphisme et f un monomorphisme tels que Imf = Kerg. D'où G est isomorphe à K = Imf = Kerg Δ F. Et g étant un épimorphisme, d'après la décomposition canonique d'un morphisme de groupe, F/K est isomorphe à H = g(F).
C.S. Supposons que G est isomorphe à un sous-groupe distingué K de F tel que F/K soit isomorphe à H. Considérons l'injection canonique i de k dans F telle que, pour tout x de K, on ait i(x) = x et un isomorphisme j de G sur K, alors f = i o j est un monorphisme du groupe G dans le groupe F. Soit s un épimorphisme de F/K sur H et s l'épimorphisme de F sur F/K ; alors b o s = g est un épimorphisme de F sur H et on a bien : Imf = K = Kerg. D'où 1 $\xrightarrow{f}$ G $\xrightarrow{g}$ H $\to$ 1 est une suite exacte courte i.e. F est une extension de G par le groupe H.

2.4. Résultat 3.

Soit G un groupe quelconque. Alors pour tout groupe H, il existe un groupe F tel que F soit une extension de G par H.

Démonstration

Il suffit de prendre f = G x H et on obtient une suite exacte courte 1 $\xrightarrow{f}$ G $\xrightarrow{g}$ GxH $\to$1 telle que, pour tout x de G, h(x) = (x,e), e étant le neutre de h et pour tout couple (a,b) de GxH, g(a,b) = b. On a donc h(G) = G x $\{$e$\}\Delta$ G x H et
Ker g = $\{$(a,b) $\in$ GxH / g(a,b) = e$\}$
= $\{$ (a,e) $\in$ GxH $\}$ = G x $\{$e$\}$ = h(G)

3. Complétion d'un groupe quelconque

3.1. Résultat 4

Tout groupe G peut être plongé dans un groupe complet $\overline{G}$.

Dans ce cas, G s'identifie à un sous-groupe de $\overline{G}$.

Démonstration

Soit G un groupe quelconque. Notons #G le nombre d'éléments de G.

- Si G = $\{e\}$ alors Z(G) = $\{e\}$ et int G = Aut G = $\{1G\}$. Donc le groupe trivial est complet. Dans ce cas, $\overline{G}$ = G et le théorème est évident.

- Supposons que G $\neq$ $\{e\}$ et construisons un groupe complet $\overline{G}$ contenant G à un isomorphisme près.

a) Considérons le groupe G x G. Alors $\neq$(G x G) $\geq$ 3.

En effet, comme G$\neq$$\{e\}$, G contient au moins deux éléments et donc G2 contient plus de 4 éléments. Notons que si F est un groupe de cardinal supérieur ou égal à 3 alors Z(PermF) = $\{1F\}$. En effet, soit f une permutation de F autre que l'identité. Alors il existe a $\in$ F tel que f(a) $\neq$ a. Considérons la permutation g qui échange b $\neq$ f(a) et f(a) et laisse invariants les autres éléments. Alors (f og)(a) = f(g(a)) = f (a) car g laisse fixe a et (g o f) (a) = g(f(a)) = b. Comme f(a) $\neq$ b alors g o f $\neq$ f o g.

D'où pour # F $\geq$ 3, Z(Perm F) = $\{1F\}$. On en déduit que Z(PermG2) = $\{1G2\}$.

Montrons que si F est un groupe de cardinal supérieur ou égal à 3, alors tout automorphisme de Perm F est intérieur.

Considérons la partition de l'ensemble des éléments d'ordre deux en classe de conjugaison et désignons par Cq la classe des produits de q transpositions disjointes avec 1 $\leq$q$\leq \frac{n}{2}$ où n = # G $\geq$ 3.

Un automorphisme étant caractérisé par sa trace sur les transpositions, il existe donc un automorphisme de Perm F transformant C1 en Cq et il sera intérieur ssi l'image est C1 car tout automorphisme intérieur de Perm F laisse invariante la classe de transpositions.

Considérons une valeur de n pour laquelle il n'existe pas une classe Cq, q > 1 tel que # Cq $\neq$ # C1 . Alors tout automorphisme transformera C1 en C1 et sera donc intérieur.

Or # C1 = $\frac{n(n-1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)...(n-2q+1)}{q!\,2^q}$ ([5] , p. 319). Il existera donc un automorphisme intérieur transformant C1 en Cq ssi #C1 = #Cq i.e $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)...(n-2q+1)}{q!\,2^q}$

i.e. (n - 2) ... (n - 2q + 1) = q ! 2q-1 (1) avec 2 $\leq$ q $\leq$ n/2 donc n $\geq$ 2q .

- Si q = 2, cette égalité devient (n-2)(n-3) = 4 qui n'est vérifiée pour aucune valeur de n $\geq$ 4

- Si q = 3, alors n $\geq$ 6 et la relation (1) s'écrit donc : (n-2)(n-3)(n-4)(n-5) = 24 et est vérifiée pour n = 6.

- Si $q \geq 4$ avec $n \geq 2q$, la relation (1) est telle que le premier membre est une fonction croissante de n et son minimum correspond à n = 2q car $n \geq 2q$ et aura la valeur (2q-2)(2q-3). ... 2.1 = (2q-2) ! or (2q - 2) ! > q! 2q-1
Donc aucune valeur de n ne vérifie l'égalité (1) pour $q \geq 4$. On en déduit qu'aucune classe de conjugaison n'a le même cardinal que la classe de transpositions parmi les partitions de l'ensemble des éléments d'ordre deux, sauf pour n = 6. Donc si $n \neq 6$, tout automorphisme de Perm F est intérieur. Or $\#G2 \neq 6$ et #G2 > 2 pour tout groupe G non réduit à l'identité car si #G = n, alors #G2 = n2 et l'équation n2 = 2 ou n2 = 6 n'a pas de solution. Donc Perm G2 est un groupe dont tout automorphisme est intérieur. Et comme Z(Perm G2) = $\{1G2\}$, alors Perm G2 est un groupe complet.

b) Montrons que G s'identifie à un sous-groupe de Perm G2 . Considérons l'application

i : $\begin{array}{l} GxG \to PermG^2 \\ t \longrightarrow i(t) = f_t \end{array}$ où ft : $\begin{array}{l} GxG \to G^2 \\ t \longrightarrow f_t(k) = tk \end{array}$ est la translation à gauche de t du groupe G x G.
i est un morphisme de groupes car $\forall$ a,b $\in$ G2 , $\forall$ x $\in$ G2 on a : [i(a)° i(b)](x) = (faofb)(x) = fa(fb (x))
=
fa(bx)=abx =fab(x) =[i(ab)](x).
Et i est injectif car Ker i = $\{a \in G2$ / i(a) =1G2$\}$= $\{$ a$\in$G2 / fa =1G2 = fe$\}$= $\{e\}$, e étant le neutre de G
Soit s le morphisme de G dans le groupe G2 qui associe à un élément x de G, l'élément s(x) = (x,e). Alors s étant un monomorphisme de groupe, g = io s est aussi un monomorphisme de G dans PermG2 . Donc G est un groupe s'identifiant au sous-groupe g(G) de Perm G2 . Perm G = $\bar{G}$ est donc un complété de G.

3.2. Exemples

1) Un groupe diédral d'ordre 2n, noté D2n étant un groupe engendré par 2 éléments d'ordre deux, est d'ordre 2n où n est l'ordre du produit de ses deux éléments. Si n = ∞ , on a un groupe diédral d'ordre ∞ , noté D ∞ . D'après ([5] , p. 313), Z(D∞) = $\{e\}$ si n est impair, #Z(D∞) = 2 si n est pair et Z(D∞) =$\{e\}$.
Comme on ne connaît pas si AutG = IntG pour $n \neq \infty$ ou n impair, on aura :

* si n = 3, $\bar{D}_6$ = Perm(D6 x D6)

* si n 3, $\bar{D}_{2n}$ = Perm D2n et $\bar{D}_\infty$ = PermD∞ où $\bar{D}$ désigne le complété du groupe D.
2) Si G est un groupe fini d'ordre 3, i.e. G = $\{e,a,b\}$ alors Perm G = 6. Donc le complété $\bar{G}$ de G EST Perm G2 car # G2 = 9.
3) D'après le théorème de Burnside, ([4] , p. 157), tout p-groupe fini G a un centre non réduit au groupe trivial. Donc un p-groupe fini n'est pas complet. Comme son ordre est p alors le complété d'un p-groupe G est PermG.

4. Relation entre le complété d'un groupe et l'extension d'un groupe par un autre

4.1. Résultat 5

Si G est un groupe dont le cardinal est différent de 2 et différent de 6, alors son complété PermG = $\bar{G}$ contient une extension de G par un certain groupe.

Démonstration

Notons d'abord que si G est un groupe tel que # G$\notin\{2,6\}$ alors d'après la démonstration du résultat 4, PermG est complet et le monomorphisme i identifie G au sous-groupe de PermG formé de translations à gauche des éléments de G.

Considérons le normalisateur de G dans son groupe de permutations PermG appelé l'holomorphe de G.

D'après ([5] , p. 281-282), H(G) = (AutG)G $\subset$ PermG et G Δ H(G) i.e. G est isomorphe à un sous-groupe distingué de H(G) $\subset$ PermG. On a ainsi une suite exacte courte 1 $\rightarrow$ G $\xrightarrow{f}$ H(G $\xrightarrow{g}$ $H(G)/G$ $\rightarrow$ 1 où j est l'injection canonique et s la surjection canonique qui sont des morphismes de groupes. Donc H(G) est une extension de G par $H(G)/G$.

4.2. Conséquence

Si G est le complété de G alors G admet une extension par G.En effet, d'après le résultat 3, Gx $\bar{G}$ est une extension de G par $\bar{G}$.

5. CONCLUSION

Soit G un groupe. On peut toujours construire à partir de G une extension par un certain groupe complet et ayant un sous-groupe isomorphe à G. Et si # G>2 et # G$\neq$ 6, alors G admet un complété contenant une extension de G par un certain groupe. Le complété ou l'extension d'un groupe n'est pas unique et cependant la connaissance d'un complété d'un groupe permet de définir une extension de ce groupe et inversement, car si H est une extension de G par un certain groupe, alors H contient un sous-groupe isomorphe à G et ce sous-groupe est distingué. Donc G s'identifie à un sous-groupe de Perm H grâce au monomorphisme f=joi où i est le monomorphisme plongeant G dans H et j celui plongeant H dans perm H.

Aussi, tout au long de notre travail, nous nous sommes penché uniquement sur l'existence des extensions et des complétés, la question d'existence d'un plus petit complété n'a pas fait objet de nos investigations et reste en étude.

BIBLIOGRAPHIE

(1) FUREZ (G), (1992), La construction de sciences, Bruxelles, De Boeck.
(2) HATEGEKIMANA (L.E), (1993), Etude comparative de quelques complétions des structures en mathématiques, mémoire, ISP-Bukavu.
(3) KUROSH (A.G.), (1967), Algèbre générale, Paris Dunod.
(4) MAC LANE (S) et BIRKHOFF (N), (1968), Les grands théorèmes, tome 2, Gauthier Villars.
(5) MUTAFIAN (Cl), (1975), Le défi algébrique, T1 Paris Vubert.
(6) QUERRE (J), (1976), Cours d'algèbre, Paris Masson.